**IV.A.2.a**

$g(u) = \frac{\sin u}{u} e^{u \operatorname{cotan} u}$ est définie et de classe $C^\infty$ sur $\mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$. On calcule :

$$g'(u) = \frac{e^{u \operatorname{cotan} u}}{u^2 \sin u} \underbrace{\left(2u \sin u \cos u - \sin^2 u - u^2\right)}_{\doteq h(u)}$$

$h$ est de classe $C^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et $h'(u) = -4u \sin^2 u$, d'où les variations :

| $u$ | $-\infty$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $h'$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $h$ | $-\infty$ | $\nearrow$ | $0$ | $\searrow$ | $-\infty$ |

$h(u)$ est donc toujours strictement négatif sauf en 0 où $h(0) = 0$.
On déduit :

$$\begin{cases} \operatorname{Sgn} g'(u) = -\operatorname{Sgn}(\sin u) \\ g'(u) \text{ ne s'annule jamais sur } \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z} \end{cases}$$

puis le tableau de variations de $g$, que l'on complètera sachant que $g$ est paire :

| $u$ | $0$ | | $\pi$ | | $2k\pi$ | | $(2k+1)\pi$ | | $(2k+2\pi)$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $g'$ | ‖ | $-$ | ‖ | ... | ‖ | $-$ | ‖ | $+$ | ‖ | $-$ |
| $g$ | ‖ | $+\infty \searrow 0$ | ‖ | $-\infty$ ... $0_-$ | ‖ | $+\infty \searrow 0_+$ | ‖ | $-\infty \nearrow 0_-$ | ‖ | $+\infty$ |

$k > 0$

Avec le calcul de limites suivant :

- Si $u \to 2k\pi$, posons $t = u - k2\pi \to 0$. On a :

$$g(u) = \frac{\sin t}{t + k2\pi} e^{(t+k2\pi)\operatorname{cotan} t} \sim \frac{\sin t}{k2\pi} \cdot e \cdot e^{k2\pi \operatorname{cotan} t} \doteq \bar{g}(t)$$

* Si $u \to 2k\pi_+$, $t \to 0_+$ et $\bar{g}(t) = \text{cst} \cdot e \cdot \frac{e^{k2\pi \operatorname{cotan} t}}{k2\pi \operatorname{cotan} t} \longrightarrow +\infty$ $(t \to 0_+)$

donc $\lim_{u \to 2k\pi_+} g(u) = +\infty$

* Si $u \to 2k\pi_-$, $t \to 0_-$ et $\bar{g}(t) = \frac{\text{cste}}{k2\pi} \cdot e \cdot e^{k2\pi \operatorname{cotan} t} \longrightarrow 0_-$

• Si $u \to (2k+1)\pi$, posons $t = u - (2k+1)\pi$. On a :

$$g(u) = \frac{-\sin t}{t+(2k+1)\pi}\, e^{(t+(2k+1)\pi)\cot t} \sim \frac{-\sin t}{(2k+1)\pi}\, e^{(2k+1)\pi \cot t} \sim \frac{1}{i} S(t)$$

* Si $u \to (2k+1)\pi_+$, $t \to 0_+$ et

$$S(t) = -\cos t \cdot e^{(2k+1)\pi \cot t} \longrightarrow -\infty \quad (t \to 0_+)$$

* Si $u \to (2k+1)\pi_-$, $t \to 0_-$ et

$$S(t) = \frac{-\sin t}{(2k+1)\pi}\, e^{(2k+1)\pi \cot t} \longrightarrow 0_+$$

**IV.A.2.b** Posons $x = v + iu$ $(u, v \in \mathbb{R})$.

$$e^{\lambda x} = x \iff e^{\lambda v}(\cos \lambda u + i \sin \lambda u) = v + iu$$

$$\iff \begin{cases} e^{\lambda v} \cos \lambda u = v \\ e^{\lambda v} \sin \lambda u = u \end{cases} \qquad (*)$$

On envisage deux cas suivant que $\sin \lambda u$ soit nul ou pas :

• 1er cas : Si $\lambda u \notin \pi\mathbb{Z}$

$(*)$ entraîne $\cot \lambda u = \frac{v}{u}$, soit $v = u \cot \lambda u$. Alors :

$$e^{\lambda u \cot \lambda u} \sin \lambda u = u$$

$$g(\lambda u) = \frac{1}{\lambda}$$

• Donc :

$$e^{\lambda x} = x \iff (*) \iff \begin{cases} v = u \cot \lambda u \\ g(\lambda u) = \frac{1}{\lambda} \end{cases}$$

Le tableau de variations de $g$ montre que l'équation $e^{\lambda x} = x$ admet toujours une infinité de solutions (si $\lambda \neq 0$, ce qui est le cas ici où l'on suppose $\lambda u \notin \pi\mathbb{Z}$)

• 2ème cas : Si $\lambda u \in \pi\mathbb{Z}$

Alors $u = \frac{k\pi}{\lambda}$ où $k \in \mathbb{Z}$, et

$$e^{\lambda x} = x \iff (*) \iff \begin{cases} e^{\lambda v}(-1)^k = v \\ u = 0 = k \end{cases}$$

Si $u \neq 0$, pas de solutions possibles dans ce cas. Mais si $u = 0$,

$$e^{\lambda x} = x \iff e^{\lambda v} = v$$

et l'on peut appliquer la question IV.A.1 pour trouver tous les $v$ tels que $e^{\lambda v} = v$, et les $x = v$ correspondants.

Conclusion : Le 1er cas suffit pour montrer que l'équation $e^{\lambda x} = x$ admet toujours une infinité de solutions complexes lorsque $\lambda \neq 0$. Evidemment, si $\lambda = 0$, l'équation équivaut à $1 = x$, et possède une unique solution.